PEER REVIEW, Vol. 5, Nº 21, 2023
DOI: 10.53660/1071.prw2625
ISSN: 1541-1389

As técnicas e estratégias de resolução de problemas cobrados em Olimpíadas de Matemática

The techniques and strategies for solving problems charged in Mathematics Olympiads

Henrique Maia Pinheiro
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5705-3486
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros
E-mail: henriquemaiactrb@gmail.com
Adenilson Pereira Bonfim
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9354-7384
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros
E-mail: adenilsonctrb@gmail.com
Gustavo Nogueira Dias
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1315-9443
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros
E-mail: gustavonogueiradias@gmail.com
Gilberto Emanoel Reis Vogado
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4763-4767
Universidade do Estado do Pará
E-mail: gilberto.vogado@uepa.br
Wagner Davy Lucas Barreto
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0675-9005
Colégio Federal Tenente Rêgo Barros
E-mail: profwlucas@yahoo.com.br
Pedro Roberto Sousa da Silva
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1780-5705
Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará
E-mail: prof.pedromat@hotmail.com
Alessandra Epifanio Rodrigues
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8375-2923
Universidade Federal Rural da Amazônia
E-mail: alessandra.epifanio@ufra.edu.br
Herson Oliveira da Rocha
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2494-6277
Universidade Federal Rural da Amazônia
E-mail: herson@ufra.edu.br
Carlos Alberto Nobre da Silva
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5299-1713
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil
E-mail: cansnobre31@gmail.com
Maria Graciete Rodrigues do Amaral
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5041-0735
Universidade do Estado do Pará
E-mail: mariagraciete.amaral@uepa.br
José Carlos Barros de Souza Júnior
https://orcid.org/0000-0003-4465-8237
Colégio Federal Ten. Rêgo Barros, Brasil
E-mail: barrosctrb@gmail.com

Recebido: 01/09/2023 | Aceito: 02/10/2023 | Publicado: 03/10/2023

RESUMO

Esta pesquisa nos remete a soluções de problemas relativos as Olimpíadas de Matemática, nos mostrando as técnicas e estratégias de resolução de problemas, sendo as questões da OBMEP poderiam ser resolvidas em cinco grandes técnicas, que foi classificado em Método clássico, Perdas e Ganhos, Quadros e Tabelas, Tentativa e Erro e Desconstrução. E, a partir desse trabalho, é feito uma pesquisa bibliográfica com ênfase nos tipos de problemas e nos tipos de técnicas que poderiam ser utilizadas para ajudar os alunos a aprender a resolver as questões das provas de Olimpíadas com mais facilidade. Também é relacionado problemas com uma ou mais soluções, assim, os problemas de Olimpíadas de Matemática instigam nos alunos a vontade em tentar resolver as questões, o prazer da descoberta e, quando ele aprende de acordo com as técnicas, ele consegue associar as diferentes formas de resolução, em certos casos até mesmo unido duas ou mais técnicas na resolução de uma questão.

Palavras-Chave: Solução de Problemas; Olimpíadas de matemática; Técnicas de soluções de problemas; Tipos de problemas;

ABSTRACT

This research takes us to solutions of problems related to the Mathematical Olympiads, showing us the techniques and strategies of problem solving, being the questions of the OBMEP could be solved in five great techniques, that was classified in Classical Method, Losses and Gains, Tables and Tables, Trial and Error, and Deconstruction. And, from this work, bibliographical research is done with emphasis on the types of problems and the types of techniques that could be used to help students learn to solve the questions of the Olympics tests more easily. Problems with one or more solutions are also related, thus, the problems of the Mathematics Olympiads instill in the students the will to try to solve the questions, the pleasure of discovery and, when they learn according to the techniques, they are able to associate the different ways of resolution, in certain cases even joining two or more techniques in the resolution of an issue.

Keywords: Problems solution; Math Olympics; Problem solving techniques; Types of problems;

INTRODUÇÃO

Neste trabalho organizamos, com base em nossas experiências de sala, na preparação dos alunos do ensino básico para as Olimpíadas de Matemática, as principais técnicas utilizadas para a resolução de problemas das provas da OBMEP, bem como fazemos a associação da importância dessas técnicas para o processo de Ensino-Aprendizagem.

Maia (2018), percebeu que as questões da OBMEP poderiam ser resolvidas em cinco grandes técnicas, que o mesmo classificou em: *Método clássico*, *Perdas e Ganhos*, *Quadros e Tabelas*, *Tentativa e Erro* e *Desconstrução*. E, a partir desse trabalho, o mesmo fez uma pesquisa bibliográfica com ênfase nos tipos de problemas e nos tipos de técnicas que poderiam ser utilizadas para ajudar os alunos a aprender a resolver as questões das provas de Olimpíadas com mais facilidade.

Ressaltamos ainda que os trabalhos acima citados podem ser de grande valia para os professores estruturarem um projeto voltado a preparação de Olimpíadas de Matemática em suas escolas, contudo, como defendido pelos autores, é importante que o professor domine a resolução dos problemas cobrados nas provas e este artigo discorrerá sobre tais técnicas que podem auxiliar os professores durante suas aulas.

Isto posto, apoiados na literatura da professora Renata Stancanelli (2001), abordaremos os principais tipos de problemas que podem ser utilizados em sala de aula e como eles contribuem no processo de ensino-aprendizagem.

Estratégias de resoluções de problemas

Suponha que você precisa decorar o número a seguir

201409640006

Trata-se de um número que possui 12 algarismos, a priori, aleatórios, que precisam ser decorados nesta ordem. Porém, podemos associar a este número a seguinte técnica para "decorá-lo".

2014	09	64	0006
Ano de entrada no curso	Código do Campus	Código do Curso	Ordem de classificação do aluno

Note que, com o auxílio dessa técnica, a tarefa de decorar números grandes pode tornar-se mais factível.

Como base para nosso trabalho, elencaremos cinco conceitos relacionados a relacionados à Resolução de Problemas, que são:

I. A resposta de um problema sempre existe, é numérica, única e chega-se a ela por um só caminho. Principalmente nas séries iniciais, os alunos acreditam que estão errados quando chegam a mais de uma resposta, ou não chegam a resposta alguma. Também é comum que os alunos achem que estão errados quando a resposta encontra da é o número zero. Instigar os alunos a procurarem mais de um meio de resolução, ou comparar as resoluções propostas por dois ou mais alunos é um excelente meio de dar continuidade às aulas.

II. A resolução deve ser rápida. Do contrário isso indica que não se sabe resolver. Um problema recorrente em sala de aula é o fato de os alunos querem a resposta o mais rápido possível, alguns sequer leem o enunciado do problema e afirmam que não o entenderam.

III. Se errar, não adianta investigar o erro, é preciso começar de novo. Tanto que precisamos desmitificar essa afirmação é que uma das técnicas a serem utilizadas na Resolução de Problemas é a *tentativa e erro*.

IV. Acerto só vem com esforço e prática para a memorização dos procedimentos. Ao trabalharmos com problemas das provas das Olimpíadas de Matemática, notamos que, caso a solução esteja muito extensa e trabalhosa, na maioria dos casos, não estamos indo pelo caminho mais simples, verifiquemos isso no seguinte problema de aritmética e contagem.

Exemplo 1: De quantos modos podemos organizar cinco amigos em uma fila indiana de modo que A nunca esteja depois de B?

Solução 01: De fato, sejam C, D e E os demais membros dessa fila, teríamos as possibilidades.

a) A _ _ _ _

Pelo princípio fundamental da contagem, temos, a pessoa B tem **4 possibilidades** de vaga, e os demais membros, eles têm

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

possibilidades para a posição na fila.

Portanto, temos

$$\mathbf{4 \times 6 = 24.}$$

b) _ A _ _ _

Pelo princípio fundamental da contagem, temos, a pessoa B tem **3 possibilidades** de vaga, e os demais membros, eles têm

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

possibilidades para a posição na fila.

Portanto, temos

$$\mathbf{3 \times 6 = 18.}$$

c) _ _ A _ _

Pelo princípio fundamental da contagem, temos, a pessoa B tem **2 possibilidades** de vaga, e os demais membros, eles têm

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

possibilidades para a posição na fila.

Portanto, temos

$$\mathbf{2 \times 6 = 12.}$$

d) _ _ _ A _

Pelo princípio fundamental da contagem, temos, a pessoa B tem **1 possibilidade** de vaga, e os demais membros, eles têm

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

possibilidades para a posição na fila.

Portanto, temos

$$\mathbf{1 \times 6 = 6.}$$

e) _ _ _ _ A

Não é possível essa formação.

Pelo princípio aditivo da contagem, existem

$$24 + 18 + 12 + 6 = 60.$$

Logo, 60 possibilidades para organizar essa fila.

Solução 02: Seja a formação

ABCDE

Note que, se A e B mudarem de lugar, obteremos

BACDE

Que não é uma formação possível, pois A estaria depois de B.

Assim, qualquer que seja a formação, sempre que A e B permutarem, um fila será “possível” e outra não.

Assim, pelo princípio fundamental da contagem, temos

$$P_2^5 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$$

Logo, 60 possibilidades para organizar essa fila.

Assim, a depender da técnica que o professor mostre aos alunos, a resolução e o entendimento da questão podem se tornar mais fácil ou mais complexo e demorado, conforme o exemplo anterior.

V. Uma questão não pode gerar dúvida, pois o bom professor não pode fazer isso com a turma. Pelo contrário, instigar o aluno a expor suas dúvidas e mostrar que, às vezes, um problema possui mais de uma interpretação, é uma boa forma de desenvolvermos a aula.

Carvalho (2010), enfatiza que

> [...] Você já deve ter percebido nesses exemplos qual é a estratégia para resolver problemas de contagem:
> 1. Postura: Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar. Nas diversas situações dos Exemplos 1 a 3, nós nos colocamos no papel da pessoa que deveria colorir a bandeira; no Exemplo 4, colocamo-nos no papel da pessoa que deveria escrever o número.
> 2. Divisão: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Colorir a bandeira foi dividido em colorir cada região; formar um número de três algarismos foi dividido em escolher cada um dos três algarismos. Formar a palavra no código Morse foi dividido em escolher o número de letras e, a seguir, em escolher cada letra. (CARVALHO, 2018, p.781)

Deste modo, notamos que é muito relevante mostrar aos nossos alunos a importância das técnicas/estratégias para resolver os problemas, mesmo para aqueles que não são de contagem.

A seguir, abordaremos quais os principais tipos de problemas que podem ser utilizados em sala de aula e como eles contribuem no processo de ensino-aprendizagem.

É importante ressaltar que existem outros tipos de problemas, porém, os que tratamos neste trabalho são os que mais são utilizados para a preparação dos alunos para as provas das Olimpíadas de Matemática.

Conhecendo os diferentes tipos de problema

Esses tipos de problemas são mais comuns em livros didáticos e nas práticas de sala de aula. Segundo Diniz:

> As características básicas de um problema convencional são: texto na forma de frases, diagramas ou parágrafos curtos; os problemas vêm sempre após a apresentação de determinado conteúdo; todos os dados de que o resolvedor necessita aparecem explicitamente no texto e, em geral, na ordem em que devem ser utilizados nos cálculos; os problemas podem ser resolvidos pela aplicação direta de um ou mais algoritmos; a tarefa básica em sua resolução é identificar que operações são apropriadas para mostrar a solução e transformar as informações do problema em linguagem matemática; a solução numericamente correta é um ponto fundamental, sempre existe e é única. (DINIZ, 2001, p. 99).

Esse tipo de problema pode ser subdivido em duas classificações, os chamados *Problemas de Enredo* e os *Arme e Efetue*.

Problemas de Enredo

Os problemas de enredo podem ser divididos em simples e compostos, a seguir dois exemplos desse tipo de problema.

Exemplo 1: Pedro pratica atividades físicas todos os dias da semana, sendo que ele corre todos os dias 5 km. Quantos quilômetros ele terá percorrido em 8 dias?

Solução: Basta fazermos $5 \cdot 8 = 40$ km.

Assim, esse é *problema de enredo simples*, pois envolve apenas uma operação na sua resolução.

Exemplo 2: José deu R$ 180 para seus dois filhos, João, o mais velho, ficou com o dobro da quantia de Jacob, seu irmão mais novo. Quanto cada um dos filhos ganhou?

Solução: Sendo Jo e Jb as quantias que João e Jacob ganharam, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} Jo = 2Jb \\ Jo + Jb = 180 \end{cases} \Rightarrow 2Jb + 2Jb = 180 \Rightarrow 3Jb = 180 \Rightarrow Jb = 60$$

Logo, Jacob ganhou R$ 60,00 e João R$ 120,00.

Por envolver mais de uma operação na sua resolução, esse é um problema de enredo composto.

Segundo Toledo e Toledo, os problemas de enredo são:

> problemas tradicionais envolvendo as operações que estão sendo efetuadas no momento. Desenvolvem no aluno a capacidade de traduzir em expressões matemáticas as situações descritas em linguagem comum. Além de construir um treino do uso de algoritmos, ajudam-no a aprofundar as ideias ligadas a cada uma das operações, uma vez que

precisa descobrir quais delas se adaptam à situação apresentada. (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 27).

Arme e efetue

Não há um contexto inserido no problema, apenas a operação matemática que desejamos que o aluno efetue.

Exemplo 3: Resolva $2^3 + \frac{38}{2} - \sqrt{25}$.

Resposta: 8 + 19 – 5 = 22.

Novamente por Toledo e Toledo, esses tipos de problema,

> constituem simples treino de técnicas operatórias e de memorização de tabuada. É claro que os alunos precisam saber como encontrar os resultados dos cálculos que estão realizando, mas esse trabalho tem sido feito cada vez mais pelas calculadoras, o que relativiza a importância desse tipo de problema. Na verdade, o “arme e efetue” nem pode ser classificado como problema, pois em geral não estimula o aluno a se empenhar na busca da solução. (TOLEDO; TOLEDO, 1997, p. 38).

Assim, problemas de arme e efetue têm um papel de “ferramenta” no processo do ensino de matemática e, grande parte desses problemas, irá exigir do aluno sua memória, uma vez que irá exigir a aplicação de alguma propriedade ou fórmula para chegar a resolução do problema.

Problemas Não-Convencionais

Um problema é dito não-convencional quando ele transcende a barreira dos problemas convencionais e, ao fazer isso, ele contribui para a desmitificação das cinco crenças citadas.

Stancanelli destaque que,

> Ao trabalhar com problemas não-convencionais, os alunos têm contato com diferentes tipos de textos e desenvolvem sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolver a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto a fim de lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando aqueles supérfluos. Planejando o que fazer, como fazer, encontrando uma resposta e testando para verificar se ela faz sentido, o aluno compreende melhor o texto. Isto gera uma atitude que não é passiva e requer uma postura diferenciada frente à resolução de problemas. (STANCANELLI, 2001, p.24).

De acordo com Stancanelli, podemos classificar os problemas não-convencionais em: problemas sem solução, com mais de uma solução, com excesso de dados, de lógica, de estratégia e outros não-convencionais.

Problemas sem solução

Retornando ao problema inicial deste capítulo, problemas sem solução são aqueles onde o texto-base não é suficiente para resolvermos o que se pede no enunciado.

Nas concepções de Gino (2008) et al.,

> Trabalhar com esse tipo de problema rompe com a concepção de que os dados apresentados devem ser usados na resolução e de que todo problema tem solução. Além disso, ajuda a desenvolver no aluno a habilidade de aprender a duvidar, a qual faz parte do pensamento crítico. (GINO, G. F. et al, 2010, p. 62).

Problemas com mais de uma solução

Para Stancanelli (2001), o trabalho com problemas com duas ou mais soluções faz com que o aluno perceba que resolvê-los é um processo de investigação do qual ele participa como ser pensante e produtor de seu próprio conhecimento.

Exemplo 4: **(OBMEP – 2012 – NÍVEL 3)** Para fazer várias blusas iguais, uma costureira gastou R$ 2,99 para comprar botões de 4 centavos e laços de 7 centavos. Ela usou todos os botões e laços que comprou. Quantas blusas ela fez?

a) 2

b) 5

c) 10

d) 13

e) 23

Solução: Com efeito, note que se trata de um problema que pode ser resolvido utilizando conceitos das *equações diofantinas lineares*, assim sendo q a quantidade de botões que custam de R$ 0,04 e s a de R$ 00,07, temos:

$$\begin{gathered} 0,04q+0,07s=2,99 \qquad \times(100) \\ 4q+7s=299 \end{gathered}$$

Note que $q_0=3$ e $s_0=41$ são soluções, assim, temos a seguinte solução paramétrica da equação,

$$\begin{cases} q_0=3+7t \\ s_0=41-4t \end{cases}, \ t\in\mathbb{Z}$$

Como queremos soluções não negativas, segue que

$$\begin{cases} q_0 \geq 0 \\ s_0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+7t \geq 0 \\ 41-4t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 10 \end{cases}$$

Portanto, se $t \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, o problema terá solução, ou seja, existem nove soluções para este problema.

Problemas de lógica

Ao analisar as provas da OBMEP de 2012 à 2019, percebemos que esses são os principais tipos de problemas exigidos pela banca examinadora, reforçando que a metodologia de ensino proposta pelo IMPA é o ensino da matemática por meio da Resolução de Problemas.

Polya ressalta que

> o ato de resolver problemas torna as questões mais experimentais, desenvolvendo uma habilidade de forma análoga com o que ocorre em práticas esportivas ou no desenvolvimento de práticas artesãs, que exigem experimentação e treinamento. Isso ocorre, pois o raciocínio exercitado pelo aluno na resolução, torna-se familiar e menos abstrato, sendo assim mais prazeroso e menos passível de esquecimento a longo prazo. (POLYA, 1978, p. 09).

A seguir, temos um exemplo desse tipo de problema, uma questão retirada da prova da OBMEP 2019 – Nível 1 – 1° Fase:

Exemplo 5: Ana, Beatriz, Cláudia, Daniela e Érica foram visitar a vovó Margarida. Beatriz chegou antes de Ana e depois de Daniela. Já Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem.

Quem foi a primeira a chegar?

A) Ana

B) Beatriz

C) Cláudia

D) Daniela

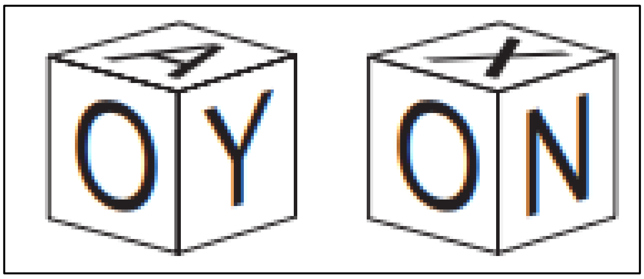
E) Érica

Solução: De fato, note que Beatriz chegou depois de Daniela, que chegou depois de Cláudia. Como Érica chegou depois de Cláudia e Ana depois de Beatriz, concluímos que Cláudia foi a primeira a chegar à casa de sua avó.

Outro problema de lógica, retirado da mesma prova:

Exemplo 6: A figura 1 mostra duas vistas de um mesmo cubo com as letras A, O, Y, X, N e E em suas faces.

Figura 1 – Cubo com faces A, O, Y, X, N e E



Fonte: OBMEP – 2019, 1ª fase, nível 1, questão 09

Qual é a face oposta à face de letra E?

A) O

B) Y

C) A

D) X

E) N

Solução: De fato, note que as faces A, N, X e Y possuem um lado em comum com a face O, então a face oposta a letra E deve ser a face que contém a letra O.

Resolvendo problemas

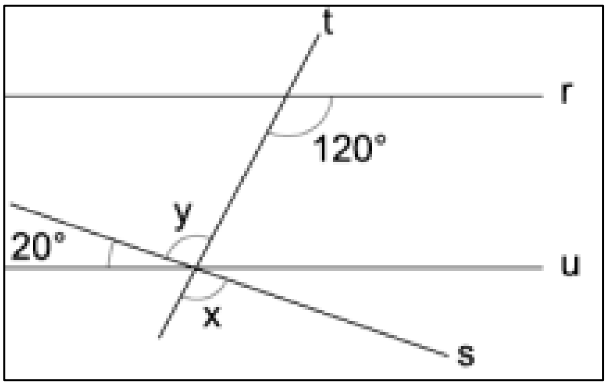
Iremos destacar as nossas concepções sobre cinco técnicas de resolução de problemas que podem ser utilizadas durante a preparação dos alunos para as Olimpíadas de Matemática, associando essas técnicas com os tipos de problemas de Stancanelli e ressaltando sua contribuição no processo de ensino-aprendizagem.

Método Clássico

Ao resolvermos um problema utilizando essa técnica faremos o uso de alguma ferramenta matemática, não havendo muita necessidade de interpretação. Essa técnica será utilizada geralmente na resolução de problemas convencionais.

Exemplo 7: Considere as retas *r*, *s*, *t*, *u* todas num mesmo plano, com r // u, conforme a Figura 2.

Figura 2– Problema envolvendo retas paralelas



Fonte: Autores

Qual o valor de x + y?

Solução: Note que x e y são ângulos opostos pelo vértice, assim, $x = y$. Também 20° + y e 120° são ângulos alternos internos, ou seja, $20° + y = 120°$. Portanto, $x = y = 100°$. Logo, $x + y = 200$.

Novamente apoiados na Neurociência, o método clássico em geral é utilizado para resolvermos problemas de "arme e efetue", consolidando "ferramentas" operacionais que são de grande importância para o ensino da matemática, ao fazer isso, este método contribui para o desenvolvimento da capacidade de memorização dos alunos.

Perdas e ganhos

Essa técnica de resolução é muito importante, pois, em nossa opinião, o aluno constrói a relação entre o valor alterado nas variáveis e o resultado da expressão, atingindo, com essa percepção, mais rapidamente o valor procurado para a expressão.

Exemplo 8: Um grupo de 14 amigos comprou 8 pizzas. Eles comeram todas as pizzas, sem sobrar nada. Se cada menino comeu uma pizza inteira e cada menina comeu meia pizza, quantas meninas havia no grupo?

Solução: Inicialmente, observamos que a quantidade de pizza distribuída a cada homem é equivalente a distribuída à duas mulheres. Podemos pensar que todas as pessoas do grupo são homens, assim, teríamos 8 homens comendo as 8 pizzas. Entretanto, faltariam seis pessoas ao grupo e como para cada homem que retiramos, podemos inserir 2 mulheres, comendo a mesma quantidade de pizza, e por haver a necessidade do acréscimo de 6 pessoas, iremos retirar 6 homens e adicionar 12 mulheres. Logo, no grupo existem 2 homens e 12 mulheres.

Exemplo 9: Em um time de basquete a média de altura dos cinco atletas do time titular é 2,06 m. Em determinado o treinador faz três substituições e a média de altura dos atletas do time que estão em quadra passa a ser de 1,98 m. Nessas condições, qual a média de altura dos três atletas que entraram em quadra?

Solução: Desde que a média dos cinco que estão em quadra é 2,06 m podemos supor que cada um dos atletas tem 2,06 m de altura. Com a saída de três desses, a média passa a ser 1,97 m, ou seja, é como se cada um dos atletas "perdesse" 0,09 m de altura, perdendo ao todo $5 \cdot 0{,}09 = 0{,}45$ m e essa perda só ocorreu por causa dos 3 atletas que entraram, podemos novamente supor que cada um deles é $\frac{0{,}45}{3} = 0{,}15$ m menor que a média, ou seja, a média de altura os atletas que entraram é de 2,06 – 0,15 = 1,91 m.

Assim, tal qual o enxadrista ao mover uma peça já conjectura o que irá acontecer nas demais jogadas, ao modificar uma variável de seu problema, o aluno consegue verificar como as outras variáveis serão modificadas até que, em determinado momento, ele irá encontrar uma resposta satisfatória.

Quadros/tabelas

Essa técnica pode ser utilizada quando o problema tiver excesso de dados ou mais de uma solução, ou seja, permite ao aluno organizar os dados e encontrar uma solução com mais facilidade. Vale ressaltar que a utilização de quadros e tabelas em problemas de análise combinatória podem ser de grande valia.

Exemplo 10: Hoje, dia 29 de julho de 2012, José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem. Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos. Em 29 de julho de 2019, qual será a razão, nessa ordem, entre as idades de José e Luiz?

Solução: É importante que o professor faça o passo a passo da montagem da tabela, assim, da informação: "José tem o dobro da idade que Luiz tinha quando José tinha a idade que Luiz tem", podemos utilizar o quadro da Ilustração 21.

Figura 3 – Resolução do problema do exemplo 10, passo 1

	Passado	**Presente**	**Futuro**
José	y	2x	
Luiz	x	y	

Fonte: Autores

A partir de "Quando Luiz tiver a idade que José tem, a soma das idades deles será 90 anos", completamos o quadro anterior obtendo o quadro da figura 3.

Figura 3 – Resolução do problema do exemplo 10, passo 2

	Passado	Presente	Futuro
José	y	2x	90 – 2x
Luiz	x	y	2x

Fonte: Próprio autor

Note que o intervalo de tempo entre "passado-presente" deve ser o mesmo para ambos, ou seja, $2x - y = y - x$, assim, $3x = 2y$. (1)

Porém, o intervalo de tempo entre "presente-futuro" também é o mesmo, ou seja, $90 - 2x - 2x = 2x - y$, daí $6x = 90 + y$. (2)

Resolvendo (1) e (2), obtemos que $y = 30$ e $x = 20$.

Portanto, a resposta do problema pode ser encontrada no quadro da Ilustração 23.

Figura 4 – Resolução do problema do exemplo 10, passo 3

	Passado	Presente	Futuro
José	30	40	50
Luiz	20	30	40

Fonte: Próprio autor

Ou seja, em 2012, José tem 40 anos e Luiz 30. Dai, em 2017, José terá 45 e Luiz 35, Logo, a razão entre as idades de José e Luiz será $\frac{45}{35} = \frac{9}{7}$.

Nesse sentido, o utilizar esse método o aluno terá uma visão mais ampla do problema e, além disso, os dados estarão organizados, fato que tem grande relevância na metodologia de Polya, uma vez que os problemas devem ser resolvidos de forma organizada.

A partir daí, espera-se que os alunos se questionem sobre: Só existe uma solução? Como podemos encontrar uma solução de forma mais rápida? É possível resolver esse problema com quadrados maiores? O número do quadrado central sempre será o 5? Sempre os números pares ficarão nos cantos?

Ao responder essas perguntas, os alunos constroem o conhecimento de forma mais sólida com menos chance de esquecerem com o passar do tempo.

Stancanelli (2001) enfatiza que

> O método de tentativa e erro, o uso, diagramas e listas são estratégias importantes para a resolução de problemas de lógica. Além disso, os problemas de lógica, pelo inusitado das histórias e pela sua estrutura, estimulam mais a análise de dados, favorecem a leitura e a interpretação do texto e, por serem motivadores, atenuam a pressão para obter-se a resposta correta imediatamente. (STANCANELLI, 2001, p. 39).

Assim, percebemos que independente da resolução proposta pelo aluno, ele poderá chegar a uma resposta satisfatória, desde que o mesmo siga os passos corretos, respeitando as fases da consolidação do aprendizado.

Voltando os comentários ao professor, resolver um problema de mais de uma maneira pode ser um dos atrativos para conseguir a atenção dos alunos, favorecendo o processo de memorização dos conhecimentos e, consequentemente, consolidando, por meio da resolução de problemas matemáticos, a aprendizagem significativa.

Considerações Finais

Acreditamos que uma preparação para as Olimpíadas de Matemática voltadas no ensino das técnicas de resoluções de problemas seja muito eficaz pois desenvolve nos alunos conceitos que podem ser correlacionados em diversos tipos de problemas.

Outro ponto importante é selecionar anteriormente as questões, organizando-as de acordo com a similaridade de resolução, mostrando, sempre que possível, diferentes maneiras de o aluno encontrar a solução, instigando também que os mesmos discutam entre si outras possibilidades de respostas.

Como defendido por Pinheiro (2020):

> Entendemos as dificuldades enfrentadas pelos professores ao tentar conseguir captar a atenção dos alunos, porém, para que ocorra o processo de aprendizagem é necessário que o aluno queira aprender, assim antes de pensar na estratégia para a resolução dos problemas, o professor necessita elaborar uma tática para ganhar a atenção do aluno, o início das aulas com um jogo ou um problema de lógica podem ser de grande valia. (PINHEIRO, 2020, p.55)

Assim, os problemas de Olimpíadas de Matemática também instigam nos alunos a vontade em tentar resolver as questões, o prazer da descoberta e, quando ele aprende de acordo com as técnicas, ele consegue associar as diferentes formas de resolução, em certos casos até mesmo unido duas ou mais técnicas na resolução de uma questão.

REFERÊNCIAS

BONFIM, A. P. **Produção e Aplicação de Material Didático para Estudantes Iniciantes em Olimpíadas de Matemática.** 2013. Dissertação (Mestrado Matemática) – Mestrado Professional em Matemática (PROFMAT), Belém – PA: UFPA, 2013.

CARVALHO, A. M. P. de. **Fundamentos Teóricos e Metodológicos do Ensino por Investigação**. Revista Brasileira De Pesquisa Em Educação Em Ciências, 18(3), 765–794, 2018. https://doi.org/10.28976/1984-2686rbpec2018183765

DINIZ, M. I. (Orgs.) **Ler escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

GINO G. F. **Consumismo e meio ambiente**: discursos e conexões no campo religioso Estudos de Religião, v. 24, n. 38, 52-74, jan./jun. 2010

MAIA, H. P. **A resolução de problemas das provas da OBMEP como metodologia auxiliar de ensino**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal do Pará. Belém, 2018.

PINHEIRO, P. **Letramentos.** Campinas: Editora da Unicamp, 2020

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**, v. 2. Rio de Janeiro: interciência, 1978.

STANCANELLI, R. **Conhecendo Diferentes Tipos de Problemas**. In: SMOLE, K. S. e DINIZ, M. I. (Org.) **Ler, escrever e resolver problemas** – Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre, Artmed, 2001.

TOLEDO, M. e TOLEDO, M. **Didática da Matemática**: como e dois. São Paulo, FTD, 1997.